PROBLEMA n° 1 PNI

1) $g(x) = a^{x} + a^{-x} \qquad (a > 0)$

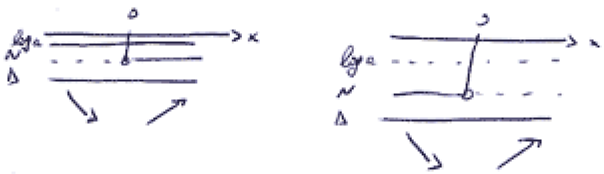
$$g'(x) = a^{x}\log a - a^{-x}\log a = \log a\,(a^{x} - a^{-x})$$

$$g'(x) \geq 0 \iff \log a\,(a^{x} - a^{-x}) \geq 0 \iff (\log a)\left(a^{x} - \frac{1}{a^{x}}\right) \geq 0$$

$$\iff (\log a)\frac{a^{2x} - 1}{a^{x}} \geq 0$$

- $\log a > 0$ per $a > 1$
- N: $a^{2x} - 1 \geq 0 \iff a^{2x} \geq 1 \overset{\boxed{a>1}}{\iff} 2x \geq 0 \iff x \geq 0$
  $\overset{0<a<1}{\iff} 2x \leq 0 \iff x \leq 0$
- D: $a^{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\underline{a > 1}$ $\qquad\qquad$ $\underline{0 < a < 1}$



IN ENTRAMBI I CASI $g(x)$ È DECRESCENTE PER $x < 0$

CRESCENTE PER $x > 0$

PROBLEMA n°1 PNI

2) $a = e \rightarrow f(x) = e^{x} + e^{-x}$

INT. ASSI $\quad x = 0 \quad f(0) = 2 \rightarrow A(0,2)$

$f(x) = 0$ PER NESSUN x

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ NO ASINT. ORIZZ

(E' NO ASINT. OBLIQUO, PERCHÉ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$)

$f'(x) =$ V. PUNTO 1)

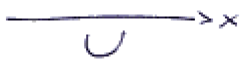
NOTA $f(x)$ E' PARI

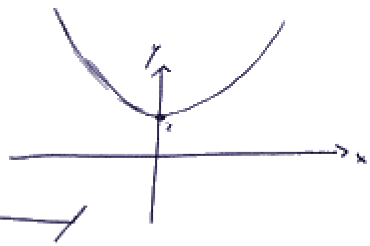
$f(-x) = e^{-x} + e^{x} = f(x)$

$x=0$ MIN RELATIVO $A(0,2)$

$f''(x) = e^{x} + e^{-x} \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

CONCAVITA':



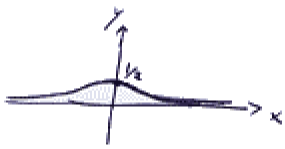


NOTA

RICORDA CHE $\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

(COSENO IPERBOLICO)

$f^{*}(x) = \frac{1}{f(x)}$



$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \rightarrow$ ASINT ORIZZ. $y = 0$

IL MINIMO RELATIVO DIVENTA MAX RELAT (STESSA ASCISSA, ORDINATA $= \frac{1}{y_{min}}$)

PROBLEMA n° 1 PNI

3) $$\int_0^t \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_0^t \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{SOSTITUZIONE} \\ e^x = s \rightarrow e^x dx = ds \\ \qquad \rightarrow dx = \frac{ds}{e^x} = \frac{ds}{s} \end{array}\right] = \int_1^{e^t} \frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{ds}{s} =$$

$x=0 \rightarrow s=1$

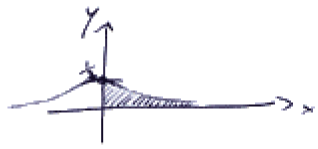
$x=t \rightarrow s=e^t$

$$= \int_1^{e^t} \frac{1}{s^2+1}\,ds = \left[\operatorname{arctg} s\right]_1^{e^t} = \operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

INTERPRETAZIONE
GEOMETRICA

ABBIAMO CALCOLATO L'AREA DELLA REGIONE (ILLIMITATA) DI PIANO COMPRESA TRA $f(x)$, L'ASSE X E L'ASSE Y ~~[illegible]~~



PROBLEMA n° 1 PNI

4) RICORDANDO CHE $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$,

SI PUÒ UTILIZZARE LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR DELLA FUNZIONE $\operatorname{arctg} x$:

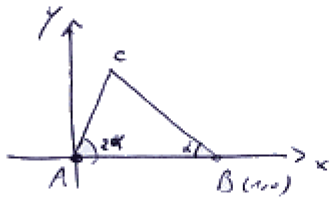
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

CHE, CALCOLATO IN $x=1$, FORNISCE:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

SI PUÒ COSÌ CALCOLARE, CON LA PRECISIONE VOLUTA, UN'APPROSSIMAZIONE PER $\frac{\pi}{4}$

PROBLEMA n° 1 ORDINAMENTO / n°2 PNI PAG 1



$0<2\alpha+\alpha<\pi \rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{3}$

CONSIDERIAMO LA RETTA PASSANTE PER A E PER C
IL SUO COEFFIC. ANGOLARE È $tg\,2\alpha$; QUINDI:

$$y = tg(2\alpha)\cdot x$$

LA RETTA PER B E C HA EQUAZIONE: (PASSA PER B(1,0) ; COEFF. ANG: $tg(\pi-\alpha)$)

$$y-0 = tg(\pi-\alpha)(x-1)$$

DA CUI: $y = (1-x)\,tg\,\alpha$ (RICORDA: $tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha$)

LE COORDINATE DI **C** SONO DATE DALL'INTERSEZIONE DI QUESTE 2 RETTE:

$$\begin{cases} y = (1-x)\,tg\,\alpha \\ y = tg\,2\alpha\cdot x \end{cases}$$

SI RICAVA $tg\,\alpha$ DALLA PRIMA: $tg\,\alpha = \frac{y}{1-x}$
E SI SOSTITUISCE NELLA SECONDA DOPO AVER SCRITTO

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

PROBLEMA N°1 ORDINAMENTO/N°2 PNI

$$y = \frac{2\frac{y}{1-x}}{1-\frac{y^2}{(1-x)^2}} \cdot x$$

DA CUI $$y = \frac{2\frac{y}{\cancel{1-x}}}{\frac{1+x^2-2x-y^2}{(1-x)^{\cancel{2}}}} \cdot x \longrightarrow y+yx^2-2xy-y^3 = 2y(x-x^2)$$

DIVIDO PER y AMBO I MEMBRI:

$$1+x^2-2x-y^2 = 2(x-x^2)$$

INFINE

$$y^2 = 1+x^2-2x-2x+2x^2$$

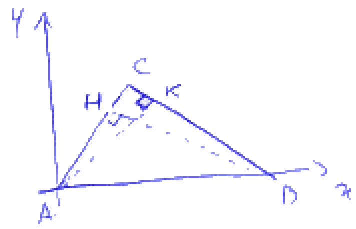
$$\boxed{y^2 = 3x^2-4x+1}$$

2. DALLA CONDIZIONE GEOMETRICA POSTA ALL' INIZIO $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$ SI RICAVANO LE CONDIZION. SU x ED y $\begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ y \geq 0 \end{cases}$.

LA EQUAZIONE TROVATA RAPPRESENTA UNA IPERBOLE $\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

DALLA QUALE SI RICAVANO GLI ELEMENTI CARATTERISTICI:

- CENTRO DI SIMMETRIA $(\frac{2}{3}; 0)$
- ASINTOTI $y = \pm\sqrt{3}(x - \frac{2}{3})$
- VERTICI $(\frac{1}{3}, 0)$ e $(1, 0)$

3. 

DETTE BH E AK LE ALTEZZE RELATIVE AD AC E CB, RISULTA CHE $BH = \operatorname{sen} 2\alpha$
$AK = \operatorname{sen} \alpha$

SI DEVE, ORA, MASSIMIZZARE $y = \operatorname{sen}^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$.

APPLICANDO LE FORMULE DI BISEZIONE OTTENIAMO

$$y = \frac{1}{2}(-2\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha + 3) \quad \text{con } 0 \leq 2\alpha < \frac{2}{3}\pi.$$

ESEGUENDO LA SOSTITUZIONE $\cos 2\alpha = t$

IL MASSIMO SI HA NEL VERTICE DELLA

PARABOLA $y = \frac{1}{2}(-2t^2 - t + 3)$, OSSIA PER $t = -\frac{1}{4}$, DA CUI $\alpha \approx 52° 15'$.

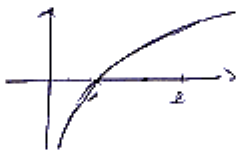
4. QUANDO $A\hat{B}C = 36°$, ALLORA $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 72°$.
SI TRATTA DI UN COSIDDETTO TRIANGOLO AUREO, IN CUI FACENDO USO DELLE SIMILITUDINI SI RICAVA CHE AC È SEZIONE AUREA DI AB, OSSIA

$$AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

QUESITO 1 (PNI) / PUNTO 4 - PROBLEMA 2 - ORDINAMENTO

IL PROBLEMA CONSISTE NEL COSTRUIRE, USANDO SOLO RIGA E COMPASSO, UN QUADRATO EQUIVALENTE AD UN CERCHIO DATO.
IL PROBLEMA È IRRISOLVIBILE CON L'USO DEI SOLI RIGA E COMPASSO.
È, INVECE, RISOLUBILE SE SI AMMETTE L'USO DI STRUMENTI IN GRADO DI TRACCIARE CURVE PARTICOLARI, COME LA SPIRALE DI ARCHIMEDE O LA QUADRATRICE DI IPPIA.

QUESITO n°2 PNI



base rettangolo: $b = f(x) = \ln x$

Altezza rettangolo: $h = 3 \cdot b = 3 \ln x$

$A_{rett} = \ln x \cdot 3 \ln x = 3 \ln^2 x$

Volume (S): $V = \int_1^e 3 \ln^2 x \, dx$

$\int \ln^2 x \, dx =$ PER PARTI $= x \ln^2 x - \int 2x \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$f' = 1$

$g = \ln^2 x$

$= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx =$ PER PARTI $=$

$f' = 1$

$g = \ln x$

$= x \ln^2 x - 2 \left[x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$

$V = \int_1^e 3 \ln^2 x \, dx = 3 \left[x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) \right]_1^e =$ $\underline{\underline{3e - 6}}$

QUESITO 3 PNI

L'EQUAZIONE DI UN'OMOTETIA DI CENTRO FISSATO O IN UNO SPAZIO n-DIMENSIONALE È DATO DALL'EQUAZIONE $x' = hx$, DOVE x' ED x SONO VETTORI DI DIMENSIONE n E $h \in \mathbb{R}$.

- LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DERIVA DALLA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA NEI REALI PER LA MOLTIPLICAZIONE

- L'ELEMENTO NEUTRO È L'IDENTITÀ CHE SI OTTIENE QUANDO $h = 1$

- L'ELEMENTO INVERSO DI UN'OMOTETIA DI COEFFICIENTE h È L'OMOTETIA DI COEFFICIENTE $\frac{1}{h}$.

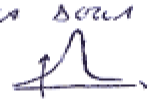
QUESITO n° 4 PNI

LA $f(x)$ È LA FUNZIONE DI DENSITÀ DELLA VARIABILE ALEATORIA <u>NORMALE</u>.

È UNIVOCAMENTE INDIVIDUATA DA 2 PARAMETRI:

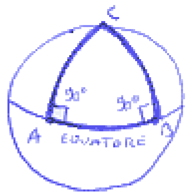
μ, IL VALORE ATTESO

σ^2, LA VARIANZA ($\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ = DEVIAZIONE STANDARD)

- AL VARIARE DI μ IL GRAFICO "TRASLA IN ORIZZONTALE"
- AL VARIARE DI σ CAMBIA LA FORMA DELLA "CAMPANA"
  - SE DIMINUISCE SI ALLUNGA 
  - SE AUMENTA, SI SCHIACCIA 

QUESITO 5 (PNI)

IL TEOREMA NON È VALIDO IN UN CONTESTO DI GEOMETRIA NON EUCLIDEA PERCHÈ ESISTE ALMENO UN TRIANGOLO LA CUI SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI NON È UN ANGOLO PIATTO. AD ESEMPIO SI CONSIDERI IL TRIANGOLO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE INDIVIDUATO DA UN POLO E DUE PUNTI QUALSIASI SULL' EQUATORE (IN QUESTO CASO LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI È MAGGIORE DI UN ANGOLO PIATTO).



GEOMETRIA IPERBOLICA: LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO È MINORE DI UN ANGOLO PIATTO

GEOMETRIA ELLITTICA (O SFERICA). LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO È MAGGIORE DI UN ANGOLO PIATTO

QUESITO 6 (PNI)

SI CONSIDERI LA SEGUENTE FIGURA DI RIFERIMENTO

$AB = BC = AC = 3$

L'EVENTO E: "LA DISTANZA DI P DA OGNI VERTICE È MAGGIORE DI 1" CORRISPONDE ALLA SUPERFICIE COLORATA DEL TRIANGOLO, OTTENUTA SOTTRAENDO DAL TRIANGOLO ABC I TRE SETTORI CIRCOLARI AVENTI CENTRO NEI VERTICI DEL TRIANGOLO, RAGGIO 1 E AMPIEZZA 60°.

QUINDI LA PROBABILITÀ RICHIESTA È DATA DAL RAPPORTO $\dfrac{A_{COLORATA}}{A_{ABC}}$.

IL TRIANGOLO ABC È EQUILATERO, QUINDI LA SUA ALTEZZA È $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. PERCIÒ $A_{ABC} = 3 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

L'AREA COLORATA È DATA DALL'AREA DI ABC MENO LA SOMMA DELLE AREE DEI TRE SETTORI CIRCOLARI.

DALLA PROPORZIONE $\pi r^2 : 360° = A_{SETT} : 60°$, SI RICAVA CHE $A_{SETTORE} = \dfrac{\pi}{6}$.

QUINDI, $A_{COLORATA} = A_{ABC} - 3 \cdot A_{SETTORE} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\cancel{3}\pi}{\cancel{6}_2} = \dfrac{9\sqrt{3} - 2\pi}{4}$

$P(E) = \dfrac{9\sqrt{3} - 2\pi}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{4}}{9\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3} - 2\pi}{9\sqrt{3}}$

QUESITO n° 7 PNI

NEL PUNTO (1, 2) LE CIRCONFERENZE DEVONO AVERE COME RETTA TANGENTE LA RETTA ~~...~~ TANGENTE ALLA PARABOLA IN QUEL PUNTO.

TROVO L'EQUAZIONE DI QUESTA RETTA TANGENTE.

$$y = x^2 + 1 \rightarrow y' = 2x \rightarrow y'(1) = 2$$ (COEFF. ANG. DELLA TANGENTE ALLA PARAB. IN $x=1$)

~~PASS...~~

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[\substack{m=2 \\ x_0=1 \\ y_0=2}]{} y - 2 = 2(x-1) \rightarrow y = 2x$$

RICORDO CHE UNA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA È PERPENDICOLARE AL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA CHE HA UN ESTREMO NEL PUNTO DI TANGENZA.

PERTANTO, I CENTRI DELLE CIRCONFERENZE GIACCIONO SULLA RETTA PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE NEL PUNTO (1, 2) (È UNICA)

TALE RETTA HA COEFF. ANG. $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER (1, 2) SI TROVA L'EQUAZIONE DEL LUOGO CERCATO (UNA RETTA):

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$$

QUESITO n° 8 PNI

PROCEDIAMO A RITROSO:

	A	B	C	
FINALE	24	24	24	
3ª PARTITA A e B ~~[illegible]~~ RADDOPPIANO (AVEVANO LA METÀ)	12	12	48	
2ª PARTITA A e C RADDOPPIANO (AVEVANO LA METÀ)	6	42	24	
1ª PARTITA B e C RADDOPPIANO (AVEVANO LA METÀ)	$\boxed{39}$	$\boxed{21}$	$\boxed{12}$	SITUAZIONE INIZIALE

QUESITO 9 (PNI)

SICURAMENTE L'EQUAZIONE (DI GRADO DISPARI) HA UNA SOLUZIONE REALE.
LA FUNZIONE ASSOCIATA ALL'EQUAZIONE E'

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

LA SUA DERIVATA PRIMA E' $y' = 6x^2 - 6x + 6$.
POICHE' y' NON SI ANNULLA MAI ($x^2 - x + 1$ NON HA RADICI REALI) LA FUNZIONE E' STRETTAMENTE MONOTONA. POICHE' LA FUNZIONE E' CONTINUA E $\lim_{x \to -\infty} 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = -\infty$ E $\lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = +\infty$, BASTA AVER MOSTRATO LA MONOTONIA DI y PER ESCLUDERE CHE L'EQUAZIONE DI PARTENZA ABBIA PIU' SOLUZIONI.

PER TROVARE IL VALORE NUMERICO CON UNA PRECISIONE DI DUE CIFRE SIGNIFICATIVE BASTA ITERARE IL METODO DI BISEZIONE (PUNTO DI PARTENZA: IL POLINOMIO PER $x = -1$ VALE -5 E PER $x = -\frac{1}{2}$ VALE 2).

QUESITO 10 TRADIZIONALE E PNI

MERIDIANI : INTERSEZIONE DEI PIANI PASSANTI PER τ CON LA SFERA S.

PARALLELI : INTERSEZIONE DELLA SFERA S CON I PIANI PERPENDICOLARI ALL'ASSE τ PASSANTI PER I PUNTI DEL SEGMENTO (SU τ) AVENTE PER ESTREMI I PUNTI DI INTERSEZIONE DI S CON τ.

PER INTRODURRE UN SISTEMA DI COORDINATE:

- LA DISTANZA DA UNO DEI DUE POLI (VERSO L'ALTRO) INDIVIDUA IL PARALLELO.
- UN ANGOLO DIEDRO ORIENTATO MISURATO A PARTIRE DA UN MERIDIANO DI RIFERIMENTO INDIVIDUA, INSIEME AL PARALLELO, IL PUNTO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE.