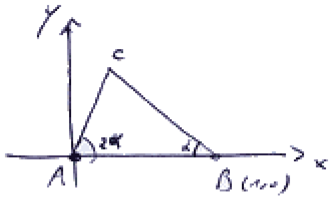
PROBLEMA N° 1 ORDINAMENTO/M°2ENI PAG 1



$0<2\alpha+\alpha<\pi \rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{3}$

CONSIDERIAMO LA RETTA PASSANTE PER A E PER C

IL SUO COEFFIC. ANGOLARE È $tg\,2\alpha$; QUINDI:

$$y = tg(2\alpha)\cdot x$$

LA RETTA PER B E C HA EQUAZIONE: (PASSA PER $B(1,0)$; COEFF. ANG.: $tg(\pi-\alpha)$)

$$y-0 = tg(\pi-\alpha)(x-1)$$

DA CUI: $y=(1-x)\,tg\,\alpha$ (RICORDA: $tg(\pi-\alpha) = -tg\,\alpha$)

LE COORDINATE DI C SONO DATE DALL'INTERSEZIONE DI QUESTE 2 RETTE:

$$\begin{cases} y=(1-x)\,tg\,\alpha \\ y = tg(2\alpha)\cdot x \end{cases}$$

SI RICAVA $tg\,\alpha$ DALLA PRIMA: $tg\,\alpha = \frac{y}{1-x}$

E SI SOSTITUISCE NELLA SECONDA DOPO AVER SCRITTO

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

PROBLEMA n°1 ORDINAMENTO/n°2 PNI

PAG2

$$y = \frac{2\frac{y}{1-x}}{1 - \frac{y^2}{(1-x)^2}} \cdot x$$

DA CUI $$y = \frac{2\frac{y}{1-x}}{\frac{1+x^2-2x-y^2}{(1-x)^2}} \cdot x \longrightarrow y + yx^2 - 2xy - y^3 = 2y(x-x^2)$$

DIVIDO PER y AMBO I MEMBRI:

$$1 + x^2 - 2x - y^2 = 2(x - x^2)$$

INFINE

$$y^2 = 1 + x^2 - 2x - 2x + 2x^2$$

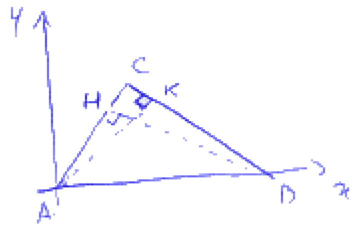
$$\boxed{y^2 = 3x^2 - 4x + 1}$$

2. ~~...~~ DALLA CONDIZIONE GEOMETRICA POSTA ALL' INIZIO $0 \le \alpha < \frac{\pi}{3}$ SI RICAVANO LE CONDIZIONI SU x ED y $\begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ y \ge 0 \end{cases}$.

LA EQUAZIONE TROVATA RAPPRESENTA UNA IPERBOLE $\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

DALLA QUALE SI RICAVANO GLI ELEMENTI CARATTERISTICI:

- CENTRO DI SIMMETRIA $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$
- ASINTOTI $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$
- VERTICI $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $(1, 0)$

3. 

DETTE BH E AK LE ALTEZZE RELATIVE AD AC E CB, RISULTA CHE $BH = \operatorname{sen} 2\alpha$
$AK = \operatorname{sen} \alpha$

SI DEVE, ORA, MASSIMIZZARE $y = \operatorname{sen}^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$.

APPLICANDO LE FORMULE DI BISEZIONE OTTENIAMO

$$y = \frac{1}{2}\left(-2\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha + 3\right) \quad \text{con } 0 \le 2\alpha < \frac{2}{3}\pi.$$

ESEGUENDO LA SOSTITUZIONE $\cos 2\alpha = t$

IL MASSIMO SI HA NEL VERTICE DELLA

PARABOLA $y = \frac{1}{2}(-2t^2 - t + 3)$, OSSIA PER $t = -\frac{1}{4}$, DA CUI $\alpha \approx 52° 15'$.

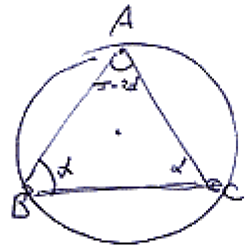
4. QUANDO $A\hat{B}C = 36°$, ALLORA $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 72°$.
SI TRATTA DI UN COSIDDETTO TRIANGOLO AUREO, IN CUI FACENDO USO DELLE SIMILITUDINI SI RICAVA CHE AC È SEZIONE AUREA DI AB, OSSIA

$$AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

PROBLEMA n° 2 ORDINAMENTO

1)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



$AB = AC = 2R\sin\alpha$

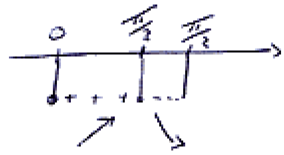
$S_{ABC}(\alpha) = \frac{1}{2}(2R\sin\alpha)(2R\sin\alpha)\sin(\pi - 2\alpha) =$

$= \frac{1}{2}4R^2\sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha = 2R^2\sin^2\alpha \cdot (2\sin\alpha\cos\alpha) =$

$= 4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$

$S'(\alpha) = 4R^2\left(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha\right) = 4R^2\sin^2\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) =$

$= 4R^2\sin^2\alpha\left(3 - 4\sin^2\alpha\right)$



$3 - 4\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

L'AREA É MAX PER $\alpha = \frac{\pi}{3}$, OVVERO QUANDO IL TRIANGOLO É EQUILATERO

PROBLEMA n° 2 ORDINAMENTO

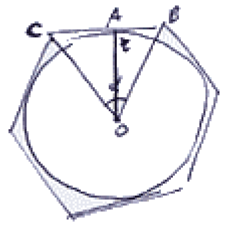
2)

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

INSCRITTO

$$A_{polig} = n\, A_{triang} = n \, \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha = \boxed{\frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}}$$

CIRCOSCRITTO



$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

$$AB = OA \cdot tg\frac{\alpha}{2} = r \cdot tg\frac{\pi}{n}$$

$$CB = 2AB = 2r \cdot tg\frac{\pi}{n}$$

$$A_{triang} = \frac{CB \cdot AO}{2} = \frac{1}{2}\, 2r\, tg\frac{\pi}{n} \cdot r = r^2\, tg\frac{\pi}{n}$$

$$A_{polig} = n \cdot A_{triang} = \boxed{n r^2\, tg\frac{\pi}{n}}$$

3)

Moltiplico e divido per 2π

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{r^2}{2}\lim_{n} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \downarrow = \frac{r^2}{2}\, 2\pi \cdot \lim_{n} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{LIMITE NOTEVOLE}}}{=} \frac{r^2}{2}\, 2\pi \cdot 1 = \pi r^2 \quad (= \text{AREA DEL CERCHIO})$$

QUESITO 1 (PNI) / PUNTO 4 - PROBLEMA 2 - ORDINAMENTO

IL PROBLEMA CONSISTE NEL COSTRUIRE, USANDO SOLO RIGA E COMPASSO, UN QUADRATO EQUIVALENTE AD UN CERCHIO DATO.
IL PROBLEMA E' IRRISOLVIBILE CON L'USO DEI SOLI RIGA E COMPASSO.
E', INVECE, RISOLUBILE SE SI AMMETTE L'USO DI STRUMENTI IN GRADO DI TRACCIARE CURVE PARTICOLARI, COME LA SPIRALE DI ARCHIMEDE O LA QUADRATRICE DI IPPIA.

QUESITO 1

L'AREA DI OGNI SEZIONE IN CORRISPONDENZA DELLA ASCISSA x È $A = \frac{y(x) \cdot h}{2}$. POICHÉ I TRIANGOLI SONO EQUILATERI È POSSIBILE ESPRIMERE L'ALTEZZA IN FUNZIONE DI y, TRAMITE IL TEOREMA DI PITAGORA $h = \sqrt{y^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} y$. QUINDI, $A = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2(x)$.

POICHÈ $y^2(x) = 4x$, RISULTA CHE IL VOLUME DEL SOLIDO È $V = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} 4x \, dx$, DA CUI

$$V = \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx = \sqrt{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

QUESITO n° 2

SI TRATTA DI APPLICARE IL TEOREMA DEL COSENO.

SE a, b, c SONO LE MISURE DEI LATI DI UN TRIANGOLO E α, β, γ LE MISURE DEGLI ANGOLI AD ESSI ORDINATAMENTE OPPOSTI, SI HA:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

DA CUI SI RICAVA: $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

AVREMO PERCIÒ:

- $\cos\alpha = \dfrac{80^2+60^2-40^2}{2\cdot 80\cdot 60} = 0{,}875 \rightarrow \alpha \cong 28{,}96° = 28° 58'$

- $\cos\beta = \dots = -0{,}25 \rightarrow \beta \cong 104{,}48° = 104° 28'$

- $\cos\gamma = \dots = 0{,}6875 \rightarrow \gamma \cong 46{,}57° = 46° 34'$

(PIÙ SEMPLICEMENTE, $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$)

QUESITO n° 3

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$

NOTA
Si ricorda che un'equazione di terzo grado ammette sempre almeno una soluzione reale.

Considero: $f(x) = x^3 - x^2 - k + 1$

Ne studio l'andamento

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$$

		0		$\frac{2}{3}$	
f'	$+ + +$		$- - -$		$+ + +$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Max $(0, -k+1)$ $\quad (f(0) = -k+1)$

Min $\left(\frac{2}{3}, \frac{23-27k}{27}\right)$ $\quad \left(f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} - k + 1 = \frac{23-27k}{27}\right)$

Inoltre: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

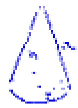
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si tratta di studiare il segno delle ordinate dei due estremi relativi trovati (max e min)

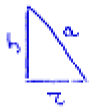
* $k < \frac{23}{27} \rightarrow y_{min} > 0,\ y_{max} > 0 \Rightarrow$ 1 soluz. reale
* $k = \frac{23}{27} \rightarrow y_{min} = 0,\ y_{max} > 0 \Rightarrow$ 3 sol. reali (di cui 2 coincidenti)
* $\frac{23}{27} < k < 1 \rightarrow y_{min} < 0,\ y_{max} > 0 \Rightarrow$ 3 sol. reali distinte
* $k = 1 \rightarrow y_{min} < 0,\ y_{max} = 0 \Rightarrow$ 3 sol. reali (2 coincidenti)
* $k > 1 \rightarrow y_{min} < 0,\ y_{max} < 0 \Rightarrow$ 1 sol. reale

QUESITO 4

IL VOLUME DEL CONO È $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$.



POICHÉ IL CONO È RETTO, VALE IL TEOREMA DI PITAGORA PER IL TRIANGOLO



. QUINDI $r^2=a^2-h^2$.

SOSTITUENDO NELLA FORMULA DEL VOLUME L'ESPRESSIONE DI r^2 E DAL MOMENTO CHE $a=1m$, SI HA:

$$V=\frac{\pi}{3}(a^2-h^2)h=\frac{\pi}{3}(h-h^3)$$

SI TRATTA ORA DI TROVARE IL MASSIMO DELLA FUNZIONE

$V(h)=\frac{\pi}{3}(h-h^3)$, DOVE h VARIA NELL'INTERVALLO $(0,+\infty)$.

LA DERIVATA PRIMA DI $V(h)$ È $V'(h)=\frac{\pi}{3}-\pi h^2$, CHE SI ANNULLA PER $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$. FACENDO LO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA, RISULTA CHE LA FUNZIONE $V(h)$ È CRESCENTE PER $0<h<\frac{\sqrt{3}}{3}$ E DECRESCENTE PER $\frac{\sqrt{3}}{3}<h<+\infty$.

QUINDI, $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ È IL VALORE CHE MASSIMIZZA $V(h)$.

SEMPRE APPLICANDO IL TEOREMA DI PITAGORA SI OTTIENE LA MISURA DI $r^2=\frac{2}{3}\ m^2$.

QUINDI, $V_{MAX}=\pi\,\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\simeq 0,403\ m^3$

POICHÉ 1ℓ CORRISPONDE AD $1\ dm^3$, IL NUMERO DI LITRI CHE IL SERBATOIO PUÒ CONTENERE È 403.

QUESITO 5

IL TEOREMA DI LAGRANGE: DATA UNA FUNZIONE $y = f(x)$ CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a, b]$ E DERIVABILE IN (a, b), ESISTE ALMENO UN PUNTO $c \in (a, b)$ NEL QUALE SI VERIFICA CHE

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

LA DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE $y = x^3 + 8$ E' $y' = 3x^2$. QUINDI L'INCOGNITA c CHE CERCHIAMO E' TALE CHE

$$\frac{16 - 0}{4} = 3c^2$$

DA CUI $c^2 = \frac{4}{3}$; DA CUI $c_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$, CHE SONO QUINDI I VALORI MEDI RICHIESTI.

GEOMETRICAMENTE, IL RISULTATO ESPRIME IL FATTO CHE LA TANGENTE ALLA CURVA NEI PUNTI $(c_1, f(c_1))$ E $(c_2, f(c_2))$ E' PARALLELA ALLA RETTA CHE UNISCE I PUNTI $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$.

QUESITO n° 6

Se prima aumenta e poi diminuisce il prezzo finale, p_1 è

$$p_1 = p\left(1 + \frac{6}{100}\right)\left(1 - \frac{6}{100}\right) = p\left(1 - \frac{36}{10000}\right)$$

Se prima diminuisce e poi aumenta il prezzo finale, p_2, è

$$p_2 = p\left(1 - \frac{6}{100}\right)\cdot\left(1 + \frac{6}{100}\right) = p\left(1 - \frac{36}{10000}\right)$$

Si deduce che $p_1 = p_2$, ovvero che il prezzo finale è ~~[illegible]~~ lo stesso nelle due situazioni. In entrambi i casi si ha una riduzione dello 0,36%.

QUESITO n°7

L'INTEGRALE DEFINITO DI UNA FUNZIONE DISPARI SU UN ~~[illegible]~~ INTERVALLO SIMMETRICO RISPETTO A $x=0$, VALE ZERO. CIOÈ:

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 0 \qquad \text{se } f(x) \text{ dispari } (a \in R^+)$$

SI PUÒ DIMOSTRARE IN QUESTO MODO:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

OPERIAMO SUL SECONDO INTEGRALE, SOSTITUENDO $x=-t$

$dx = -dt$

$x=0 \to t=0$

$x=-a \to t=a$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-dt) =$$

$$= \int_{a}^{0} -f(-t)\,dt = \left[\begin{matrix} f(x) \text{ DISPARI} \\ \Downarrow \\ f(x) = -f(-x) \end{matrix}\right] = \int_{a}^{0} f(t)\,dt =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{PROPRIETÀ} \\ \text{DEGLI} \\ \text{INTEGRALI}\end{matrix} \;\; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \right] = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

PER CUI:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-2}^{2}[3+f(x)]\,dx = \begin{matrix}\text{LINEARITÀ} \\ \text{DELL'INTEGRALE}\end{matrix} = [3x]_{-2}^{2} + \underbrace{\int_{-2}^{2} f(x)\,dx}_{=0} = 12$$

QUESITO n° 7

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$$

CONDIZIONI SUI COEFF BINOMIALI: $\begin{cases} n \geq 4 \\ n-2 \geq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 5 \end{cases} \rightarrow \underline{n \geq 5}$

$$4\frac{n!}{4!(n-4)!} = 15\frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}$$

$$\cancel{4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{4}\cdot 3!\,\cancel{(n-4)!}} = 15\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)\cancel{(n-5)!}}{3!\,\cancel{(n-5)!}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = 15\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}$$

$n=2$ E $n=3$ NON POSSONO ESSERE SOLUZIONI PERCHÉ $n \geq 5$

SEMPLIFICO, MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $\frac{3!}{(n-2)(n-3)}$

$$n(n-1) = 15(n-4)$$

$$n^2 - n = 15n - 60$$

$$n^2 - 16 + 60 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-240}}{2} = \begin{matrix} 6 \\ 10 \end{matrix}$$

ENTRAMBE ACCETTABILI

QUESITO n° 9

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{PER SOSTITUZIONE } x=\sin t \rightarrow dx=\cos t\,dt =$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \cos t \cdot \cos t\,dt =$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \text{RICORDANDO } \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \rightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c$$

RITORNO ALLA VARIABILE x:

$$t = \arcsin x$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \left[\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= 2x\sqrt{1-x^2}$$

E QUINDI

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}2x\sqrt{1-x^2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

CHE E' PROPRIO UN QUARTO DELL'AREA DEL CERCHIO DI RAGGIO 1.

IL GRAFICO DI $y=\sqrt{1-x^2}$ E' UNA SEMICIRCONFERENZA, CHE TRA 0 E 1 SI RIDUCE A UN QUARTO DI CIRCONFERENZA

QUESITO 10 TRADIZIONALE E PNI

MERIDIANI : INTERSEZIONE DEI PIANI PASSANTI PER τ CON LA SFERA S.

PARALLELI : INTERSEZIONE DELLA SFERA S CON I PIANI PERPENDICOLARI ALL'ASSE τ PASSANTI PER I PUNTI DEL SEGMENTO (SU τ) AVENTE PER ESTREMI I PUNTI DI INTERSEZIONE DI S CON τ.

PER INTRODURRE UN SISTEMA DI COORDINATE:

- LA DISTANZA DA UNO DEI DUE POLI (VERSO L'ALTRO) INDIVIDUA IL PARALLELO.
- UN ANGOLO DIEDRO ORIENTATO MISURATO A PARTIRE DA UN MERIDIANO DI RIFERIMENTO INDIVIDUA, INSIEME AL PARALLELO, IL PUNTO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE.