

1. Serie Numeriche

1.1 Serie Numeriche nel campo reale

Definizione 1.1 Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ costruiamo un'altra successione $\{s_n\}$ ponendo $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$. La coppia ordinata $(\{a_n\}, \{s_n\})$ si dice serie numerica di termine generale $\{a_n\}$. Se la successione - che chiameremo successione delle somme parziali - $\{s_n\}$ è regolare indicheremo con il simbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ il suo limite che si chiamerà somma della serie.

Esempio 1.1 Serie di Mèngoli

Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Per calcolare s_n notiamo che

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}, \quad \forall p \in \mathbb{R}, p \neq 0, p \neq -1$$

e quindi

$$s_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

La serie è regolare ed ha per somma 1.

Esempio 1.2 Serie armonica

Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Proviamo che la serie è divergente a $+\infty$. Notiamo che, essendo $a_n > 0$, la successione s_n , quindi la serie, è regolare. Sarà allora sufficiente provare che una estratta di s_n è divergente. Si ha:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Esempio 1.3 La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q \in \mathbb{R}$.

Se $q = 1$ si ha $s_n = n \rightarrow +\infty$. Sia perciò $q \neq 1$. Ricordando la formula per la somma dei termini di una progressione geometrica abbiamo, $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ da cui si deduce facilmente il comportamento della serie. Precisamente si trova che la serie converge se e solo se $|q| < 1$ ed in tal caso la sua somma è $\frac{1}{1-q}$.

Esempio 1.4 Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

La serie diverge positivamente. Infatti,

$$s_n = \sum_{j=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^n (\log(j+1) - \log j) = \log(n+1) \rightarrow +\infty.$$

Notiamo che per determinare il carattere della serie abbiamo proceduto per via diretta. Cioè abbiamo espresso in forma chiusa il termine generale della successione delle somme parziali. In generale, un tale procedimento è da sconsigliare per le difficoltà di carattere algebrico. Cerchiamo quindi delle condizioni dalle quali dedurre il carattere della serie senza essere costretti a manipolare la successione s_n .

Definizione 1.2 (*Serie resto*). Data una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e un numero $k \in \mathbb{N}$, diciamo serie resto di ordine k la serie ottenuta da quella data cancellando i primi k termini ovvero la serie $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Teorema 1.1 Una serie ed un suo qualsiasi resto hanno lo stesso carattere.

Dim. Si ha:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_k + \sum_{j=k+1}^n a_j = s_k + \sum_{j=k+1}^n a_j$$

□

Teorema 1.2 La successione dei resti di una serie convergente è infinitesima.

Dim. Usando le notazioni del teorema precedente abbiamo:

$$R_k \equiv \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k+1}^n a_j = \lim_n s_n - s_k = s - s_k$$

da cui

$$\lim_k R_k = \lim_k s - s_k = 0.$$

□

Teorema 1.3 Si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall \lambda \neq 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

tranne il caso in cui si presenti la forma $+\infty - \infty$.

Dim. Basta passare al limite nelle eguaglianze

$$\sum_{j=1}^n \lambda a_j = \lambda \sum_{j=1}^n a_j, \quad \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j$$

□

Teorema 1.4 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente è che*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{j=n+1}^{n+p} a_j \right| < \varepsilon.$$

Dim. Basta applicare il criterio di convergenza per le successioni alla successione s_n . □

Corollario 1.1 *Condizione necessaria affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ risulti convergente è che $a_n \rightarrow 0$.*

Dim. Basta applicare il criterio precedente con $p = 1$. La condizione non è sufficiente per la convergenza. Basti pensare alla serie armonica. □

Una classe particolare di serie è costituita dalle serie a termini di segno costante. La caratteristica di queste serie è di avere la successione delle somme parziali monotona cosicché tali serie risultano sempre regolari.

Teorema 1.5 (confronto) *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie tali che: $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Allora:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ed in tal caso $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

Dim. Dall' ipotesi si ha:

$$\sum_{j=1}^n a_j \leq \sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

e ricordando che le somme parziali di ciascuna delle due serie sono monotone segue la 1. Similmente si prova la 2. □

Teorema 1.6 *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numerica convergente a termini positivi. Sia $\{k_n\}$ una successione crescente di interi e sia $b_n = a_{k_n}$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e si ha: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dim. Si ha:

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n a_{k_j} \leq \sum_{j=1}^{k_n} a_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui la tesi per monotonia. □

Corollario 1.2 Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi che contengano gli stessi termini. Allora si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dim. Basta applicare due volte il teorema precedente. □

Studiamo adesso alcune condizioni sufficienti per la convergenza delle serie a termini positivi.

Teorema 1.7 (del rapporto) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esistono $h \in [0, 1[$ e $\nu \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h \quad \forall n > \nu.$$

Allora la serie converge.

Dim. Dall' ipotesi si ha:

$$a_{\nu+k+1} \leq h a_{\nu+k} \leq h^2 a_{\nu+k-1} \leq \dots \leq h^k a_{\nu+1}$$

e quindi la tesi dal teorema di confronto. □

Teorema 1.8 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n > \nu.$$

Allora la serie diverge.

Dim. La successione a_n è monotona crescente e quindi non può tendere a zero. Viene violata la condizione necessaria di convergenza. □

Corollario 1.3 (criterio del rapporto) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $l > 1$ la serie diverge;
2. Se $l < 1$ la serie converge;
3. Se $l = 1$ nulla può dirsi.

La dimostrazione è una ovvia conseguenza del teorema precedente e del teorema della permanenza del segno. Con riferimento al caso 3. notiamo che la serie armonica e la serie di Mengoli si trovano entrambe al caso 3. ma hanno carattere diverso. □

Teorema 1.9 (della radice) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esistono $h \in [0, 1[$ e $\nu \in \mathbb{N}$ tali che

$$\sqrt[\nu]{a_n} \leq h \quad \forall n > \nu.$$

Allora la serie converge.

Dim. Si ha: $a_n \leq h^n$ e la tesi è immediata per confronto. □

Teorema 1.10 (della radice) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[\nu]{a_n} \geq 1 \quad \forall n > \nu.$$

Allora la serie diverge.

Dim. Si ha: $a_n \geq 1$ e la tesi segue dalla condizione necessaria di convergenza. □

Corollario 1.4 (criterio della radice) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esiste

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora:

1. Se $l > 1$ la serie diverge;
2. Se $l < 1$ la serie converge;
3. Se $l = 1$ nulla può dirsi.

Teorema 1.11 (Raabe) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esiste

$$\lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l \in \tilde{\mathbb{R}}.$$

Allora:

1. Se $l > 1$ la serie converge;
2. Se $l < 1$ la serie diverge;
3. Se $l = 1$ nulla può dirsi.

Attraverso i criteri del rapporto e della radice si possono studiare le serie il cui termine generale presenta un tasso di decadimento più che polinomiale. Falliscono entrambi, ad esempio, per la serie (armonica generalizzata) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha > 0$. Talvolta risulta utile il criterio di Raabe. Comunque proviamo il seguente risultato dovuto a Cauchy.

Teorema 1.12 (di condensazione) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$. Allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.

Dim. Si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_n &\equiv \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} \leq a_1 + 2\{a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n})\} \\ &\leq a_1 + 2(s_{2^n} - a_1) = -a_1 + 2s_{2^n} \end{aligned}$$

ovvero

$$\sigma_n \leq -a_1 + 2s_{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = \sigma_{n-1} \end{aligned}$$

e la tesi segue applicando due volte il teorema di confronto. □

Usando il teorema di condensazione è possibile studiare la serie armonica generalizzata.

Esempio 1.5 Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha > 0.$$

Applicando il teorema di condensazione, è sufficiente conoscere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n \quad \alpha > 0$$

che è ovviamente noto in quanto serie geometrica. Pertanto la serie armonica generalizzata converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dal teorema di confronto segue immediatamente il

Teorema 1.13 (del confronto asintotico) Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Osservazione 1.1 Il teorema si può riformulare nel modo seguente: Se $a_n = o(1)$, e $b_n = o(1)$ e $a_n = l b_n + o(1)$ allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Adesso, per mostrare l'utilità dei vari criteri di convergenza, studiamo alcune serie numeriche.

Esempio 1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} = +\infty$.

Infatti,

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Esempio 1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata. Infatti,

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Esempio 1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n^2}$ converge. Infatti,

$$\sin^2 \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Esempio 1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 7n + \sqrt{2}}{n^4 + \sqrt{3}n^3 + 2n^2 + 5n + 1}$ converge. Infatti,

$$\frac{3n^2 + 7n + \sqrt{2}}{n^4 + \sqrt{3}n^3 + 2n^2 + 5n + 1} = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{3}{n^2}\right).$$

Esempio 1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata. Infatti, applicando il teorema di condensazione, la serie data ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{(2^{\alpha-1})^n}$$

la quale risulta convergente per $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$ indipendentemente dal valore di k . Notiamo incidentalmente che, come conseguenza della convergenza della serie si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^k n}{n^\alpha} = 0.$$

Esempio 1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} (1 + e^{-x^2})^n$;

È una serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}(1 + e^{-x^2})$ e quindi converge se e solo se il modulo della ragione è minore di 1 ovvero, per $|x| > \sqrt{\log 2}$.

Esempio 1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$;

La serie diverge. Infatti, applicando il criterio del rapporto si trova

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{\binom{2n+2}{n+1}} \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) \frac{(2n)! ((n+1)!)^2}{(n!)^2 (2n+2)!} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^3}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Esempio 1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$;

La serie converge. Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} \rightarrow 0.$$

Esempio 1.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

La serie converge. Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Esempio 1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$;

Infatti, ragionando come nel caso della serie di Mèngoli si ha:

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$s_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Esempio 1.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

La serie converge. Infatti, applicando il criterio della radice si ha:

$$\frac{1}{3 \sqrt[n]{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{3} < 1.$$

Esempio 1.17 $\sum_{n=0}^{\infty} (\log^2 x - \log x)^n$, $x > 0$;

La serie è geometrica di ragione $q = (\log^2 x - \log x)$ e quindi converge se e solo se $|q| < 1$ ovvero per $x < e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Esempio 1.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)^{2n} \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$;

Posto $q = 1 - \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, applicando il criterio del rapporto si ha che la serie converge se $|q| < 1$.

Esempio 1.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\arctan n}$;

Usando il criterio del confronto asintotico si vede che la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$. Quest'ultima serie si studia poi con il criterio della radice trovando che converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) x^{2n}$;

Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) x^{2n+2}}{\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) x^{2n}} = \left(1 + \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}}\right) x^2 \rightarrow x^2$$

e quindi la serie è convergente se e solo se $|x| < 1$.

Esempio 1.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$;
 La serie converge. Infatti,

$$\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 2.$$

Esempio 1.22 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n!}$;

Confrontiamo con la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. Infatti, ricordando che $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$ si deduce che, almeno definitivamente si ha:

$$\frac{1}{n \log n} \leq \frac{1}{\log n!}$$

e quindi la serie data diverge.

Esempio 1.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$; (confronta con $\frac{1}{n^\alpha}$.)

1.2 Serie a termini di segno non costante

Preliminarmente mostriamo la validità della seguente formula di sommazione per parti.

Lemma 2.1 (Abel) Posto $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, si ha:

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0, p \leq q - 1.$$

Dim.

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p}^q A_{n-1} b_n = \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{m=p-1}^{q-1} A_m b_{m+1} \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \end{aligned}$$

□

Servendoci del Lemma di Abel possiamo dimostrare il seguente teorema di Cauchy - Dirichlet.

Teorema 2.1 Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Supponiamo che $b_n \geq b_{n+1} \rightarrow 0$ ed inoltre esista $M : |A_n| = \left| \sum_{j=0}^n a_j \right| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Dim. Proviamo che la serie converge verificando il criterio di Cauchy. Ricordiamo che $b_n \rightarrow 0$ ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \Rightarrow 0 < b_n < \varepsilon$$

e quindi, se $n > \nu$, $p \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| &= \left| A_{n+p} b_{n+p} - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| \leq M \left(b_{n+p} + b_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \right) \\ &= M (b_{n+p} + b_n + b_n - b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \dots + b_{n+p-1} - b_{n+p}) = 2M b_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2 Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Sia inoltre b_n una successione monotona e limitata. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.

Dim. Supponiamo, ad esempio, che la successione b_n sia decrescente e chiamiamo l il suo limite. Applicando il teorema precedente si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(b_n - l)$. Dal fatto che $a_n b_n = a_n(b_n - l) + a_n l$ la tesi si ottiene applicando il teorema precedente alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(b_n - l).$$

□

Come corollario si ha il seguente criterio di convergenza di Leibniz.

Teorema 2.3 Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ tale che: $0 < a_{n+1} < a_n$, $a_n \rightarrow 0$. Allora la serie è convergente.

Osservazione 2.1 Nelle stesse ipotesi del teorema appena dimostrato si ha:

$$|s - s_n| \leq M b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dim. Infatti,

$$\begin{aligned} |s - s_n| &= \left| \sum_{j=n}^{+\infty} a_j b_j \right| = \left| \lim_k \sum_{j=n}^k a_j b_j \right| \\ &= \lim_k |a_n(b_n - b_{n+1}) + (a_n + a_{n+1})(b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots + (b_{k-1} - b_k)(a_n + \dots + a_k) \\ &\quad + b_k(a_n + \dots + a_k)| \\ &\leq M b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

e, nel caso del teorema di Leibniz la disuguaglianza prende la forma seguente

$$|s - s_n| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Definizione 2.1 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice Assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

In generale convergenza e convergenza assoluta non sono equivalenti. Infatti, si ha:

Teorema 2.4 Una serie Assolutamente convergente è convergente.

Dim. Applicando il criterio di convergenza di Cauchy si ha: $\left| \sum_{j=n}^{n+p} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{n+p} |a_j| < \varepsilon$. □

Esempio 2.1 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente ma non assolutamente convergente.

Teorema 2.5 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n = b_n + o(c_n)$ dove la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ è assolutamente convergente. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ risulta convergente.

Dim. Per ipotesi si ha: $a_n - b_n = o(c_n)$ e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ è assolutamente convergente, quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. \square

Esempio 2.2 La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{e^n n!}$$

è convergente.

Infatti,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \theta_n \in]0, 1[: n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{-\theta_n/12n}$$

e quindi

$$(-1)^n \frac{n^n}{e^n n!} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(1 - \frac{\theta_n}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n \theta_n}{12\sqrt{2\pi} n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

da cui quanto affermato perché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

è convergente per il teorema di Leibniz mentre la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta_n}{n^{3/2}}$$

è assolutamente convergente.

1.3 Proprietà associativa e commutativa

Definizione 3.1 Sia data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sia $\{k_n\}$ una successione di interi crescente. A partire dalla serie data possiamo costruire la successione $b_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} a_j$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gode della proprietà associativa se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge per ogni scelta possibile della successione $\{k_n\}$ ed inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Esempio 3.1 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ non gode della proprietà associativa.

Infatti,

$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) \neq \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0.$$

Teorema 3.1 Ogni serie regolare gode della proprietà associativa.

Dim. Infatti la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è una estratta della successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Definizione 3.2 Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è un riordinamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se esiste una corrispondenza biunivoca $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che: $b_n = a_{j_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.3 Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gode della proprietà commutativa se ogni suo riordinamento è convergente e la somma di tutti i riordinamenti è uguale alla somma della serie data.

Teorema 3.2 Ogni serie assolutamente convergente gode della proprietà commutativa.

Dim. Il teorema è stato già provato nel caso delle serie a termini positivi. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la serie in questione. Poniamo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\},$$

e analogamente,

$$b_n^+ = \max\{b_n, 0\}, \quad b_n^- = \max\{-b_n, 0\}.$$

Si ha:

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|; \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

e quindi dall'ipotesi segue che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sono entrambe convergenti. Essendo queste ultime a termini positivi possiamo dire che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Allora, per differenza, converge anche il riordinamento e si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

che è la tesi. □

Teorema 3.3 (Riemann - Dini) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente ma non assolutamente convergente. Allora assegnati ad arbitrio $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è possibile costruire un riordinamento della serie data tale che α, β siano rispettivamente massimo e minimo limite per la successione delle somme parziali delle serie riordinata.

Dim. Si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- = +\infty.$$

Siano $\{P_j\}$ e $\{Q_j\}$ rispettivamente i termini positivi ed i moduli dei termini negativi della serie data nello stesso ordine in cui si presentano in $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Naturalmente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n = +\infty.$$

Adesso assegnamo due successioni $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ tali che

$$\alpha_n \rightarrow \alpha, \quad \beta_n \rightarrow \beta.$$

Sia m_1 il minimo intero tale che

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{m_1} > \beta_1,$$

e sia k_1 il minimo intero tale che

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{m_1} - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{k_1}) < \alpha_1$$

In maniera simile si determinano i numeri $m_2, k_2, \dots, m_n, k_n$. Posto infine

$$x_n = P_1 + P_2 + \dots + P_{m_1} - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{k_1}) + P_{m_1+1} + P_{m_1+2} + \dots + P_{m_2} \\ - (Q_{k_1+1} + Q_{k_1+2} + \dots + Q_{k_2}) + \dots + P_{m_{n-1}+1} + P_{m_{n-1}+2} + \dots + P_{m_n}$$

$$y_n = P_1 + P_2 + \dots + P_{m_1} - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{k_1}) + P_{m_1+1} + P_{m_1+2} + \dots + P_{m_2} \\ - (Q_{k_1+1} + Q_{k_1+2} + \dots + Q_{k_2}) + \dots + P_{m_{n-1}+1} + P_{m_{n-1}+2} + \dots + P_{m_n} \\ - (Q_{k_{n-1}+1} + Q_{k_{n-1}+2} + \dots + Q_{k_n})$$

Sfruttando la minimalità dei numeri m_n, k_n si ha:

$$\begin{cases} |x_n - \beta_n| \leq P_{m_n} \\ |y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n} \end{cases}$$

e, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la tesi. □

1.4 Serie Prodotto secondo Cauchy

Definizione 4.1 Date due serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ chiamiamo serie prodotto secondo Cauchy - o prodotto di convoluzione - la serie in cui il termine generale è il prodotto delle rispettive somme parziali, ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

In generale la serie prodotto di due serie convergenti non è convergente come mostra il seguente

Esempio 4.1 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ è convergente per il teorema di Leibniz. Mostriamo che la serie $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2$ non lo è.

Il termine generale della serie prodotto è:

$$(-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-(k+1))(k+1)}}.$$

Per provare che la serie prodotto non converge mostriamo che il valore assoluto del termine generale non tende a zero. Infatti,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-(k+1))(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)n}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1.$$

D'altra parte ci sono i seguenti risultati:

Teorema 4.1 (Mertens) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono due serie delle quali una converge e l'altra assolutamente convergente allora la serie prodotto è convergente.

Teorema 4.2 Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono assolutamente convergenti allora la serie prodotto è assolutamente convergente.

Esempio 4.2 La costante di Eulero - Mascheroni

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right).$$

Usando la formula di Taylor arrestata al secondo ordine si ha:

$$\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e perciò la serie converge. Inoltre

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \equiv H_n - \log n$$

e quindi, chiamando γ la somma della serie, otteniamo che la ridotta della serie armonica diverge logaritmicamente. La costante γ si chiama costante di Eulero - Mascheroni. Non è noto se si tratti o no di numero razionale.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{H_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{\log n}{H_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{H_n - \log n}{H_n} = 1.$$

Possiamo studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n H_n}.$$

Dal fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n H_n}}{\frac{1}{n \log n}} = 1$$

segue che la serie da studiare ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ che è divergente e si vede facilmente attraverso il criterio di condensazione.

Esempio 4.3 Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ dove

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \frac{1}{3 \cdot (n-2)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n-k+1)}.$$

Si ha:

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 \right) = 2 \frac{H_n}{n+1}$$

e quindi la serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n}{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n.$$

Verifichiamo le ipotesi del teorema di Leibniz. Ricordando che $H_n - \log n \rightarrow \gamma$ segue

$$A_n = \frac{H_n}{n+1} = \frac{H_n - \log n}{n+1} + \frac{\log n}{n+1} \rightarrow 0.$$

Verifichiamo adesso la decrescenza di A_n . Con semplici calcoli si vede che la disuguaglianza $A_{n+1} < A_n$ è equivalente alla disuguaglianza

$$H_n \left(1 - \frac{n+1}{n+2} \right) > \frac{1}{n+2}$$

che è vera perché $H_n > 1$. La serie quindi converge per il teorema di Leibniz. Inoltre la serie risulta assolutamente divergente perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{H_n}{n+1}}{\frac{\log n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\log n} = 1 \neq 0.$$

□

Esempio 4.4 Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n - \operatorname{sen} n) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)$.

La serie è a termini positivi. Applicando la formula di Taylor, si trova

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

quindi,

$$(n - \operatorname{sen} n) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui segue che la serie data è convergente.

1.5 Una osservazione sui numeri reali

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, supponiamo $x_0 > 0$ per fissare le idee. Poniamo $C = \{0, 1, \dots, 9\}$. Come sappiamo esiste un unico numero $C_0 \in \mathbb{N}_0$ tale che $C_0 \leq x_0 < C_0 + 1$. Adesso cerchiamo $C_1 \in C$ tale che

$$C_0 + \frac{C_1}{10} \leq x_0 < C_0 + \frac{C_1 + 1}{10}.$$

Portando a forma intera si trova che

$$x_0 - 10C_0 - 1 < C_1 \leq x_0 - 10C_0$$

e C_1 è unico per le proprietà del numero parte intera. Abbiamo quindi

$$q_1 \equiv C_0 + \frac{C_1}{10} \leq x_0 < C_0 + \frac{C_1}{10} + \frac{1}{10} = q_1 + \frac{1}{10}.$$

Cerchiamo adesso $C_2 \in C$ tale

$$q_1 + \frac{C_2}{10^2} \leq x_0 < q_1 + \frac{C_2 + 1}{10^2}.$$

Procedendo come prima si trova un unico numero con i requisiti richiesti. Continuando in questo modo abbiamo

$$\sum_{j=0}^n \frac{C_j}{10^j} \leq x_0 < \sum_{j=0}^n \frac{C_j}{10^j} + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si trova che

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{10^n}.$$

In questo modo i numeri reali si possono vedere come particolari serie numeriche. Ogni numero reale è somma di una serie di numeri razionali, ovvero si rende concreta l'affermazione $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Inoltre se si vuole costruire una successione di numeri razionali convergente al numero x_0 basta prendere la successione delle somme parziali della serie ottenuta. In particolare, dalla serie si può spiegare la regola della frazione generatrice. Per esempio, vogliamo convertire in frazione il numero $0, \bar{3}$. Si ha:

$$0, \bar{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 3 \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Convertiamo in frazione il numero $2, \overline{34}$. Si ha:

$$\begin{aligned} 2, \overline{34} &= 2 + 0, \overline{34} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} + \frac{4}{10^{n+1}} = 2 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^{2n}} \\ &= 2 + \frac{3}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{100^n} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = 2 + \frac{3}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + 4 \frac{1}{100} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{232}{99}. \end{aligned}$$

1.6 Serie a termini complessi

Concludiamo questo capitolo sulle serie numeriche con un breve cenno alle serie numeriche a termini complessi. Sia quindi $\{a_n\}$ una successione a termini complessi. In modo simile a quanto fatto nel caso reale costruiamo la successione delle somme parziali chiamiamo il suo limite - in \mathbb{C} - somma della serie. Si pone dunque

$$s \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

È immediato il seguente

Teorema 6.1 *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ed ha per somma il numero s se e solo se le due serie reali $\sum_{n=0}^{\infty} \Re a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \Im a_n$ sono convergenti rispettivamente a $\Re s$, $\Im s$.*

In modo simile si dà la nozione di serie assolutamente convergente. Diciamo cioè una serie assolutamente convergente quando converge la serie dei moduli.

Teorema 6.2 *Una serie assolutamente convergente è convergente e si ha:*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Dim. Poiché $|\Re a_n|, |\Im a_n| \leq |a_n|$ si ha la convergenza della serie delle parti reali e della serie delle parti immaginarie da cui la convergenza della serie. Inoltre, dalle disuguaglianze

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi, passando al limite

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$$

□

Esempio 6.1 *La serie geometrica*

Studiamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. La serie converge assolutamente per $|z| < 1$ e non converge per $|z| \geq 1$ perchè il termine generale non è infinitesimo.

Esempio 6.2 *Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $z \in \mathbb{C}$.*

La serie converge assolutamente per $|z| < 1$ e non converge per $|z| > 1$ perchè il termine generale non è infinitesimo. Studiamo la serie per $|z| = 1$. Posto $z = e^{i\theta}$, la serie da studiare diventa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\theta n}}{n}$. Applicando il criterio di Cauchy - Dirichlet si trova che la serie converge qualunque sia $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.7 L'esponenziale complesso

Studiamo adesso una delle funzioni più importanti di tutta la Matematica. La funzione esponenziale complessa.

Definizione 7.1 La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è assolutamente convergente in \mathbb{C} quindi poniamo per definizione

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Teorema 7.1 Si ha

$$\lim_n \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dim. Proviamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| < \varepsilon$$

da cui poi facilmente si deduce la tesi. Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ siano $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N} : |z| < |z_0| \leq m$. Applicando la formula di Newton,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=2}^n \frac{z^k}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \right| = \left| \sum_{k=2}^n \frac{z^k}{k!} c(n, k) \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{k!} c(n, k) = \sum_{k=2}^m \frac{|z|^k}{k!} c(n, k) + \sum_{k=m+1}^n \frac{|z|^k}{k!} c(n, k) \equiv I + II. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda II abbiamo:

$$\begin{aligned} II &= \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \left(1 + \frac{|z|}{m+2} + \frac{|z|^2}{(m+2)(m+3)} + \dots + \frac{|z|^{n-m-1}}{(m+2) \dots n}\right) \\ &\leq \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^j = \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{m+2}} \leq \frac{|z_0|^{m+1}}{(m+1)!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

se $m \rightarrow \infty$. Possiamo quindi scegliere m in modo che $II < \frac{\varepsilon}{2}$. Per I si ha invece: (ferma restando la scelta fatta per m),

$$II \leq \sum_{k=2}^m c(n, k) \frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{k=2}^m c(n, k) \frac{|z_0|^k}{k!} \rightarrow 0$$

se $n \rightarrow \infty$ perchè, come facilmente si verifica per induzione su k , $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n, k) = 0$. □

Teorema 7.2 Si ha:

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$
2. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
3. $|e^z| = e^{\Re z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dim. Per provare la 1. utilizziamo il teorema precedente ed il fatto che le serie sono tutte assolutamente convergenti. Si ha:

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = e^z \cdot e^w. \end{aligned}$$

Per provare la 2. basta passare al limite nell'identità:

$$\overline{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{\bar{z}}{n}\right)^n.$$

Proviamo infine la 3.

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\bar{z}} = e^{2\Re z} = (e^{\Re z})^2$$

da cui la tesi. □

Definizione 7.2 Poniamo

$$\cos t = \Re e^{it} \quad \sin t = \Im e^{it}; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ovvero

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 7.3 Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Dim. Infatti, dalla definizione segue

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n + (-it)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1 + (-1)^n}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Similmente,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n - (-it)^n}{2i n!} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} i^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Osservazione 7.1 Se $t \in [0, 1[$ la serie del seno soddisfa le ipotesi del teorema di Leibniz e quindi si ottiene, $\operatorname{sen} t \leq t$. Tenuto conto che, se $t > 1$ la diseguglianza è ovvia e della simmetria, si ottiene:

$$|\operatorname{sen} t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Come ulteriore applicazione del teorema di Leibniz, si trae infine,

$$t - \frac{t^3}{3!} \leq \operatorname{sen} t \leq t \quad \forall t \in [0, 1[.$$

Procedendo similmente con la serie del coseno si trova

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1[$$

da cui,

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0, 1[$$

Osservazione 7.2 Notiamo che si ha:

$$\operatorname{sen} t = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} + o(t^{2n+1}), \quad t \rightarrow 0, \quad \cos t = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} + o(t^{2n}), \quad t \rightarrow 0.$$

Infatti, per $n \in \mathbb{N}$, e $|t| < 1$, si ha:

$$\begin{aligned}\left| \operatorname{sen} t - \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \right| &= \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \right| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)!} t^{2j+1} = t^{2n+3} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)!} t^{2(j-n)} = o(t^{2n+1})\end{aligned}$$

Similmente si dimostra la formula per il coseno. □