

1. Calcolo Differenziale per funzioni di una variabile

1.1 Definizione di Derivata e prime proprietà

Definizione 1.1 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Allora esiste $\delta > 0$: $x_0 + h \in]a, b[$, $\forall 0 < |h| < \delta$. Se esiste finito il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv f'(x_0)$$

diciamo che la funzione f è derivabile nel punto x_0 ed il valore del limite si chiama derivata della funzione f nel punto x_0 .

Da semplici considerazioni geometriche si ottiene subito il fatto che la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. L'equazione della retta tangente è quindi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Dire che la funzione è derivabile nel punto x_0 equivale a dire che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

ovvero,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

Nel caso in cui il rapporto incrementale ha un salto nel punto x_0 diciamo che la funzione presenta un punto angoloso in x_0 . Se invece i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti al tendere di x ad x_0 allora diciamo che f ha una cuspidine nel punto x_0 .

Esempio 1.1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$ è derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} e risulta $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.2 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ è derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} e risulta $f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k = nx_0^{n-1}.$$

Esempio 1.3 $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = x^\alpha$, $\forall x \in]0, +\infty[$ con $\alpha > 0$ è derivabile in tutti i punti di $]0, +\infty[$ e risulta $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Infatti,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = x_0^\alpha \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{h} = x_0^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x_0}} \rightarrow \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

Esempio 1.4 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con $a > 0, a \neq 1$ è derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} e risulta $f'(x) = a^x \log a \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \frac{a^h - 1}{h} \rightarrow a^{x_0} \log a.$$

Esempio 1.5 $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = \log_a x$, $\forall x \in]0, +\infty[$ con $a > 0, a \neq 1$ è derivabile in tutti i punti di $]0, +\infty[$ e risulta $f'(x) = \frac{1}{x \log a} \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Infatti,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a x_0}{h} \rightarrow \frac{1}{x_0 \log a}.$$

Esempio 1.6 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ è derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} e risulta $f'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= -\sin x_0 \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos x_0. \end{aligned}$$

Esempio 1.7 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ è derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} e risulta $f'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} = \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \\ &= -\cos x_0 \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x_0 \frac{\sin h}{h} \rightarrow -\sin x_0. \end{aligned}$$

Teorema 1.1 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in]a, b[$ e sia f derivabile nel punto x_0 . Allora f è continua in x_0 .

Dim. Infatti,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

Naturalmente il teorema non è invertibile come testimonia la funzione $f(x) = |x|$, nell'origine.

1.2 Algebra delle derivate

Teorema 2.1 Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, e supponiamole entrambe derivabili nel punto $x_0 \in]a, b[$. Allora:

1. la funzione $f + g$ è derivabile nel punto x_0 e risulta

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

2. la funzione $f \cdot g$ è derivabile nel punto x_0 e risulta

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

3. se la funzione f è diversa da zero in x_0 e derivabile nel punto x_0 allora la funzione $\frac{1}{f}$ è derivabile e risulta

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Dim. Immediata dalla definizione di derivata.

Teorema 2.2 Sia $f :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $g :]c, d[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$. Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia derivabile in x_0 e che la funzione $g(y)$ sia derivabile in y_0 . Supponiamo inoltre che $f(]a, b[) \subseteq]c, d[$. Allora la funzione $u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, definita ponendo $u(x) = g(f(x))$, $\forall x \in]a, b[$ risulta derivabile nel punto x_0 e si ha:

$$u'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dim. Dimostriamo il teorema ricorrendo alla definizione di derivata. Calcoliamo cioè il limite del rapporto incrementale relativo alla funzione $u(x)$ nel punto x_0 . Poniamo

$$\gamma(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0; \\ g'(y_0) & y = y_0. \end{cases}$$

La funzione γ risulta continua perché la funzione g è derivabile ed inoltre si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \gamma(f(x_0)) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

che è quanto si voleva.

Esercizio 2.1 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$x^x, (\sin x)^{\cos x}, (\log x)^{\log x}, \log |x|.$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \log |x|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 \exp\left(\sin \frac{1}{x-1}\right), & x \neq 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.3 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua ed iniettiva che risulti anche derivabile in un punto $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo inoltre che $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione f^{-1} risulta derivabile in $f(x_0)$ e risulta

$$\left(\frac{d}{dx} f^{-1}\right)(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempio 2.1 Derivata di $\arcsen x$, $\arccos x$, $\arctang x$.

1.3 Il differenziale.

Definizione 3.1 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in]a, b[$. Dalla definizione di derivata si ha immediatamente che esiste $A \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

La funzione lineare $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita mediante la legge $\varphi(h) = A \cdot h$, si dice differenziale di f nel punto x_0 e si indica con il simbolo df .

Osserviamo che, dalla definizione di derivata si ha: $A = f'(x_0)$ e che viceversa, se vale la formula la funzione è derivabile in x_0 . A volte, per comodità, si usa scrivere $h = dx$ e quindi

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + o(dx).$$

1.4 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

Definizione 4.1 Sia $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{X}$. Diciamo che la funzione presenta un massimo relativo nel punto x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in X \cap B_\delta(x_0).$$

Diciamo che la funzione presenta un minimo relativo nel punto x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in X \cap B_\delta(x_0).$$

Teorema 4.1 (Fermat) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in]a, b[$ nel quale f presenta un massimo o un minimo relativo. Allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. Per fissare le idee supponiamo che il punto x_0 sia di minimo. Il rapporto incrementale della funzione f nel punto x_0 risulta quindi positivo in un intorno destro di x_0 e negativo in un intorno sinistro da cui la tesi per definizione di derivata. \square

Teorema 4.2 (Rolle) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dim. Se il massimo ed il minimo della funzione sono assunti sulla frontiera dell'intervallo allora la funzione è costante e la conclusione è ovvia. In caso contrario almeno uno dei due punti è interno all'intervallo di definizione e quindi la tesi è immediata dal teorema di Fermat. \square

Teorema 4.3 (Cauchy) Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Dim. La funzione $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$\omega(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

verifica le ipotesi del teorema di Rolle. \square

Teorema 4.4 (Lagrange) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Dim. Basta prendere $g(x) = x$ nel teorema precedente. \square

Osservazione 4.1 Se $f(a) = f(b)$ si ottiene il teorema di Rolle.

1.5 Alcune conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema 5.1 (funzioni a derivata nulla) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in (a, b) e

derivabile in $]a, b[$. Supponiamo che $f'(x) \equiv 0$. Allora la funzione è costante in (a, b) .

Dim. Siano $x_1, x_2 \in]a, b[$. Proviamo che $f(x_1) = f(x_2)$. Basta applicare il teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$. Si ottiene,

$$\exists c \in]x_1, x_2[: f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) = 0.$$

Teorema 5.2 (*caratterizzazione della stretta monotonia*) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in (a, b) e derivabile in $]a, b[$. Condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione f risulti strettamente crescente in (a, b) sono le seguenti:

1. $f'(x) \geq 0 \forall x \in]a, b[$;
2. l'insieme degli zeri di $f'(x)$ non ha punti interni.

Dim. Le condizioni sono necessarie. Per definizione di funzione crescente si ha: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \forall x \neq x_0$ da cui passando al limite si trova, $f'(x_0) \geq 0$ quindi la 1. Proviamo la 2. Ragionando per assurdo, si troverebbe un intervallo in cui $f' \equiv 0$ quindi f sarebbe costante in tale intervallo contro l'ipotesi. Le condizioni sono sufficienti. Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange, $\exists c \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \leq 0$. Per concludere dobbiamo provare che $f(x_1) < f(x_2)$. Se fosse $f(x_1) = f(x_2)$ allora, dal fatto che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in]x_1, x_2[$ avremmo la funzione costante in $[x_1, x_2]$ contro la 2. \square

Osservazione 5.1 Naturalmente un teorema simile è valido per le funzioni strettamente decrescenti

Esempio 5.1 Monotonia delle funzioni elementari.

Mediante il teorema precedente si possono studiare le funzioni elementari e determinare gli intervalli in cui esse risultano monotone.

Teorema 5.3 (*Darboux sulle derivate*) Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Siano $\lambda_1 = f'(x_1)$, $\lambda_2 = f'(x_2)$. Allora, qualunque γ compreso nell'intervallo di estremi λ_1, λ_2 esiste $c \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(c) = \gamma$.

Osservazione 5.2 Se la funzione f' è continua la tesi del teorema è già nota. Il fatto importante è che il teorema è valido anche se la funzione f' non è continua.

In altri termini:

Corollario 5.1 Una derivata non può avere punti di salto.

Comunque una derivata può essere discontinua ma, evidentemente le sue discontinuità possono essere di seconda specie come mostra il seguente

Esempio 5.2 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile in tutti i punti ma la derivata è discontinua nell'origine.

Definizione 5.1 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si dice una primitiva di f se F è derivabile in $]a, b[$ e risulta $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]a, b[$.

Teorema 5.4 Due primitive di una medesima funzione in un medesimo intervallo differiscono per una costante

Dim. Si tratta di una ovvia conseguenza del teorema di Lagrange. Infatti la funzione differenza delle due primitive ha derivata identicamente nulla. \square

Comunque non è detto che una funzione qualsiasi abbia primitive.

Esempio 5.3 La funzione \mathcal{U} non ha primitive.

Infatti, se ne avesse andremmo contro il teorema di Darboux sulle derivate. \square

Teorema 5.5 (I di de L'Hopital) Siano $f, g :]a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ivi derivabili, tali che $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$. Supponiamo che $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b)$, e che esiste $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed è uguale al precedente.

Teorema 5.6 (II di de L'Hopital) Siano $f, g :]a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ivi derivabili, tali che $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$. Supponiamo che $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b)$, e che esiste $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed è uguale al precedente.

Osservazione 5.3 I teoremi di de l'Hopital non dicono che i due rapporti $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ hanno lo stesso comportamento.

Esempio 5.4 Infatti, il rapporto $\frac{2x + \sin x}{2x - \sin x}$ converge ad 1 all'infinito ma il rapporto delle derivate non è regolare.

Esempio 5.5 Non conviene applicare il teorema dell'Hopital senza prima verificare le ipotesi. Tentando di applicare il teorema dell'Hopital al calcolo di $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ si trova che il rapporto delle derivate è $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Tuttavia possiamo ricavare qualche utile informazione dal teorema di de l'Hopital.

Esempio 5.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1$$

ovvero,

$$\arcsen x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang x}{x} = 1$$

ovvero,

$$\arctang x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

1.6 La formula di Taylor

Ricordiamo che, se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nel punto $x_0 \in]a, b[$ allora si ha:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0,$$

ovvero

$$f(x) = T_1(x) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0$$

dove T_1 è un polinomio di primo grado. Anzi, T_1 è l'unico polinomio di primo grado per cui risulti

$$T_1(x_0) = f(x_0), \quad T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

In tal caso diremo che la funzione $f(x)$ ed il polinomio hanno un contatto di ordine uno nel punto x_0 .

Definizione 6.1 Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, due funzioni derivabili n volte in $]a, b[$. Diciamo che funzioni hanno un contatto di ordine n nel punto x_0 se accade che

$$f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0), \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Cerchiamo un polinomio che abbia un contatto di ordine assegnato con la funzione f in un punto x_0 del suo campo di definizione. Poniamo

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - x_0)^j,$$

con $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Siccome

$$T_n^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^n j(j-1) \cdots (j-k+1) a_j (x - x_0)^{j-k},$$

si ha:

$$T_n^{(k)}(x_0) = k! a_k,$$

e quindi

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j,$$

è l'unico polinomio di grado n che ha un contatto di ordine n nel punto x_0 con la funzione f .

Teorema 6.1 (*Proprietà del polinomio di Taylor*) Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabili n volte in $]a, b[$, sia $x_0 \in]a, b[$ e siano $T_n[f], T_n[g]$ i rispettivi polinomi di Taylor. Allora:

1. $T_n[\alpha f + \beta g] = \alpha T_n[f] + \beta T_n[g]$;
2. $T'_n[f] = T_{n-1}[f']$.

Teorema 6.2 (*Formula di Taylor*) Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in]a, b[$. Allora, posto $E_n(x) = f(x) - T_n[f](x)$, si ha:

1. $E_n(x) = o(x - x_0)^n, x \rightarrow x_0$;
2. Se esiste $f^{(n+1)}(c)$, allora $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.

1.7 Funzioni convesse in un intervallo.

Definizione 7.1 Un sottoinsieme X di \mathbb{R}^2 si dice convesso se, per ogni coppia P_0, P_1 di suoi punti il segmento che congiunge P_0, P_1 è contenuto in X .

Definizione 7.2 Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è convessa in (a, b) se l'insieme

$$\text{EPI}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), y \leq f(x)\}$$

è convesso. Diciamo che f è concava se $-f$ è convessa.

Dalla definizione è evidente che:

Teorema 7.1 La funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in (a, b) se e solo se comunque si scelgono $x, y \in (a, b)$ i punti del segmento di estremi $P = (x, f(x)), Q = (y, f(y))$ appartengono all'insieme $\text{EPI}(f)$.

Lemma 7.1 (*di convessità*) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo

$$\Phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad x, y \in (a, b), x \neq y.$$

Allora f è convessa se e solo se

$$\Phi(x, z) \leq \Phi(x, y) \leq \Phi(z, y), \quad \forall x, y, z \in (a, b), x < z < y.$$

Teorema 7.2 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ convessa in $]a, b[$. Allora:

1. f è derivabile dalla destra e dalla sinistra in tutti i punti di $]a, b[$;
2. f è continua in tutti i punti di $]a, b[$.

Dim. Il teorema è una conseguenza immediata del lemma di convessità. Infatti, il lemma afferma che i rapporti incrementali sono crescenti e limitati superiormente da cui la 1. Per provare la 2. basta osservare che la derivabilità dalla destra o dalla sinistra implicano - rispettivamente - la continuità. \square

Teorema 7.3 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa in $]a, b[$ e derivabile in almeno un punto x_0 . Allora,

$$f'(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Dim. Supponiamo $x < z < x_0$. Dal lemma di convessità

$$\Phi(x, z) \leq \Phi(x, x_0) \leq \Phi(z, x_0), \quad \forall z \in]x, x_0[$$

da cui, passando al limite per $z \rightarrow x_0^+$,

$$\Phi(x, x_0) \leq f'(x_0)$$

ovvero

$$f'(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in]a, x_0[.$$

Si procede similmente se $x > x_0$. \square

Corollario 7.2 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa in $]a, b[$ e derivabile in almeno un punto x_0 ed inoltre $f'(x_0) = 0$. Allora il punto x_0 è punto di minimo assoluto per f in $]a, b[$.

Teorema 7.4 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $]a, b[$. Allora f è convessa se e solo se f' è crescente in $]a, b[$.

Dim. Sia f convessa. Proviamo che f' è crescente. Siano quindi $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_1 < x_2$. Per il lemma di convessità,

$$\Phi(x_1, x) \leq \Phi(x_1, x_2) \leq \Phi(x, x_2), \quad \forall x_1 < x < x_2.$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_1^+$ nella disuguaglianza di sinistra si trova

$$f'(x_1) \leq \Phi(x_1, x_2)$$

mentre passando al limite per $x \rightarrow x_2^-$ nella disuguaglianza di destra si trova

$$\Phi(x_1, x_2) \leq f'(x_2)$$

quindi

$$f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

Viceversa, siano $x < z < y$ tre punti dell' intervallo $]a, b[$. Applicando il teorema di Lagrange nell' intervallo $]x, z[$ abbiamo che $\exists c \in]x, z[: f'(c) = \Phi(x, z)$ e, similmente, applicando il teorema di Lagrange nell' intervallo $]z, y[$ abbiamo che $\exists d \in]z, y[: f'(d) = \Phi(z, y)$ e utilizzando la monotonia di f' si trova $\Phi(x, z) \leq \Phi(z, y)$ ovvero i rapporti incrementali sono crescenti in una variabile - fissata l'altra. Allora,

$$\Phi(x, z) = \Phi(z, x) \leq \Phi(y, x) = \Phi(x, y) \leq \Phi(z, y)$$

quindi f è convessa. □

Teorema 7.5 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in $]a, b[$. Allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ in $]a, b[$.

Dim. Infatti, f è convessa se e solo se f' è crescente e quindi la tesi. □

Definizione 7.3 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 oppure il grafico di f presenta tangente verticale nel punto x_0 . Se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa in $]x_0 - \delta, x_0[$ e concava in $]x_0, x_0 + \delta[$ o viceversa, allora si dice che il punto x_0 è un Flesso per la funzione.

Teorema 7.6 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo che il punto x_0 sia di flesso per f . Allora $f''(x_0) = 0$.

Dim. Se in $]x_0, x_0 + \delta[$ la funzione è concava allora f' è decrescente ovvero

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

quindi $f''(x_0) \leq 0$. D'altra parte in $]x_0 - \delta, x_0[$ la funzione è convessa quindi

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad]x_0 - \delta, x_0[$$

quindi $f''(x_0) \geq 0$ da cui la tesi. □

Esempio 7.1 La funzione $f(x) = x^3$ ha un flesso nell'origine e $f''(0) = 0$.

Esempio 7.2 Naturalmente il teorema non è invertibile. Infatti, la funzione $f(x) = x^4$ non ha flesso nell'origine ma $f''(0) = 0$.

Esercizio 7.2 Concavità e convessità della funzione $f(x) = xe^{-x^2}$.

Teorema 7.7 Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, una funzione derivabile n volte in $x_0 \in]a, b[$, con $n \geq 2$, e supponiamo che $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \dots, n - 1$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora:

1. Se n è dispari, il punto x_0 non è di estremo relativo per f ;
2. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo relativo per f ;
3. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo relativo per f .

Dim. Applicando la formula di Taylor arrestata all'ordine n con il resto nella forma di Peano otteniamo:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)} \right]$$

e passando al limite per $x \rightarrow x_0$ si trova che l'espressione entro parentesi quadre ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ da cui la tesi. \square

Esercizio 7.3 Dire se l'origine è estremo relativo per la funzione $f(x) = x \sin x - \cos 2x$.

Esercizio 7.4 Dire se l'origine è estremo relativo per la funzione $f(x) = x \log(1 - x) + e^{x^2} - 1$.

Esercizio 7.5 Studiare il grafico della funzione $f(x) = x \arctan(|\log x| + \log x)$.

Esercizio 7.6 Studiare il grafico della funzione $f(x) = x^3 \exp x|x|$.

Esercizio 7.7 Dire quante soluzioni ha l'equazione $x^7 = 7^x$.